Intégrales de Wallis

John Wallis, mathématicien anglais, est né en 1616 et est mort en 1703. Wallis est donc antérieur à Newton.

1) Définition.

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \ dt.$$

W_n existe pour tout entier naturel n car la fonction $t \mapsto \sin^n t$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Autres expressions de W_n.

Le changement de variables $u = \frac{\pi}{2} - t$ fournit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \ dt.$$

Soit ε un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction $u \mapsto \operatorname{Arcsin} u = t$ est de classe C^1 sur $\left[0, \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right]$ et on peut poser $t = \operatorname{Arcsin} u$ ou encore $u = \sin t$ pour obtenir $\displaystyle\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \sin^n t \ dt = \int_0^{\operatorname{Arcsin}(\pi/2-\varepsilon)} \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}\ du$. Quand ε tend vers 0 par valeurs supérieures, $\displaystyle\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \sin^n t \ dt$ tend vers W_n et il en est de même de $\displaystyle\int_0^{\operatorname{Arcsin}(\pi/2-\varepsilon)} \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}\ du$ de sorte que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}\ du$ converge. Comme la fonction $u \mapsto \dfrac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}$ est positive sur $[0, 1[$, on en déduit que cette fonction est intégrable sur $[0, 1[$. Quand ε tend vers 0, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}\ du.$$

On peut aussi poser $u = \sin t$ dans l'intégrale définissant W_{2n+1} pour obtenir

$$W_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t \ dt = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2 t\right)^n \cos t \ dt = \int_0^1 \left(1 - u^2\right)^n \ du.$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n+1} = \int_0^1 (1-u^2)^n \ du.$$

3) Signe et sens de variation de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout entier naturel n et tout réel t de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \sin^n t$, est continue, positive et non nulle (mais pas strictement positive) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, $W_n > 0$.

La fonction $t \mapsto \sin^n t - \sin^{n+1} t = \sin^t(1 - \sin t)$, est continue, positive et non nulle (mais pas strictement positive) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, $W_n - W_{n+1} > 0$ et finalement $0 < W_{n+1} < W_n$.

La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et strictement décroissante.

4) Limite.

1ère idée. On montre « à la main » que $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit a un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour tout naturel n, on a

$$0 \leqslant W_n = \int_0^a \sin^n t \ dt + \int_a^{\pi/2} \sin^n t \ dt \leqslant a \sin^n a + \left(\frac{\pi}{2} - a\right).$$

On choisit et on fixe a dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ de sorte que $0 < \frac{\pi}{2} - a < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout entier naturel n, on a alors $0 \leqslant W_n \leqslant a \sin^n a + \frac{\varepsilon}{2}$.

Maintenant, puisque a est dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin a$ est dans $]0, 1[$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a \sin^n a = 0$.

Il existe ainsi un entier naturel n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $a\sin^n a \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $W_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.
On a montré que $\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant W_n \leqslant \varepsilon)$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = 0.$$

2ème idée. On utilise le théorème de convergence dominée pour atteindre le même but.
Pour $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(t)=\sin^n t$ (avec la convention usuelle $\forall t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f_0(t)=1$).

- Chaque fonction f_n est intégrable sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ car continue sur ce segment.
- La suite de fonction f_n converge simplement sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction f définie par :
  $\forall t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ f(t)=\begin{cases} 0 \text{ si } t<\frac{\pi}{2} \\ 1 \text{ si } t=\frac{\pi}{2}\end{cases}$.
  De plus, f est continue par morceaux sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ |f_n(t)| \leqslant 1 = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue et intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

D'après le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \int_0^{\pi/2} f(t)\,dt = 0$.

3ème idée. L'équivalent de W_n obtenu en 11) fournit en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$.

5) Premières valeurs.
$W_0=\int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1=\int_0^{\pi/2}\sin t\,dt = 1$.

$$W_0=\frac{\pi}{2} \text{ et } W_1 = 1.$$

6) Relation de récurrence.
Soit n un entier naturel. Les deux fonctions $t\mapsto -\cos t$ et $t \mapsto \sin^{n+1} t$ sont de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2}\sin t \sin^{n+1} t\,dt = \left[-\cos t\sin^{n+1} t\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin^n t\,dt \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 t)\sin^n t\,dt = (n+1)\left(W_n - W_{n+2}\right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)W_{n+2}=(n+1)W_n \text{ ou encore } W_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}W_n.$$

7) Calcul de W_n.
Soit p un entier naturel non nul.

$$W_{2p}=\frac{(2p-1)(2p-3)\dots1}{(2p)(2p-2)\dots2}W_0=\frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots1}{((2p)(2p-2)\dots2)^2}\frac{\pi}{2}=\frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\frac{\pi}{2}=\frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}}\frac{\pi}{2},$$

ce qui reste vrai pour $p=0$.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ W_{2p}=\frac{(2p-1)(2p-3)\dots1}{(2p)(2p-2)\dots2}\times\frac{\pi}{2} \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ W_{2p}=\frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\frac{\pi}{2}=\frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}}\frac{\pi}{2}.$$

De même, si p un entier naturel non nul,

$$W_{2p+1}=\frac{(2p)(2p-2)\dots2}{(2p+1)(2p-1)\dots1}W_1=\frac{((2p)(2p-2)\dots2)^2}{(2p+1)(2p)(2p-1)\dots1}=\frac{2^{2p}p!^2}{(2p+1)!},$$

ce qui reste vrai pour $p = 0$.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ W_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 1} \text{ et } \forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p+1} = \frac{2^{2p}p!^2}{(2p+1)!}.$$

8) W_{n+1} est équivalent à W_n.

D ?après 3), la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et strictement décroissante. Donc, pour tout naturel n, on a $W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$. Après division par le réel strictement positif W_n, on obtient d'après 6)

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < \frac{W_n}{W_n} = 1.$$

Quand n tend vers l'infini, le théorème des gendarmes montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$ ou encore

$$W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n.$$

9) Formule de Wallis.

D'après 8), $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{W_{2p+1}}{W_{2p}} = 1$. D'autre part, d'après 7), $\frac{W_{2p+1}}{W_{2p}} = \frac{(2\times 4\times\dots\times(2p))^2}{(3\times 5\times\dots\times(2p-1))^2}\frac{2}{(2p+1)\pi}$. On obtient ainsi une première version de la formule de Wallis

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \lim_{p\to+\infty} \sqrt{p}\frac{1\times 3\times\dots\times(2p-1)}{2\times 4\times\dots\times(2p)}.$$

ou encore, en élevant au carré et après simplification, on obtient (avec une formulation médiocre car les produits apparaissant au numérateur et au dénominateur sont divergents) :

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7\times\dots}{2\times 4\times 4\times 6\times 6\times\dots}.$$

10) La suite $((n+1)W_nW_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

D'après 6), pour tout entier naturel n, on a $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ et donc $(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+1)W_nW_{n+1}$. Ainsi, la suite $((n+1)W_nW_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donc, pour tout entier naturel n, $(n+1)W_nW_{n+1} = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

11) Equivalent simple de W_n quand n tend vers $+\infty$.

D'après 8), $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$ et donc, d'après 10),

$$\frac{\pi}{2} = (n+1)W_nW_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} nW_n^2.$$

Puisque $W_n > 0$, on en déduit que $W_n = \sqrt{W_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

12) Série entière associée à W_n.

Puisque $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, la série entière $\sum W_nx^n$ a un rayon de convergence égal à 1. Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} W_nx^n$.

Pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tout réel x tel que $|x| < 1$ et tout entier naturel n, on a

$$|(\cos^n t)\, x^n| \leqslant |x|^n.$$

Puisque la série géométrique de terme général $|x|^n$ converge pour x donné tel que $|x| < 1$, la série de fonctions de terme général $t \mapsto \cos^n t x^n$ est normalement convergente et donc uniformément convergente sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, pour $x \in]-1,1[$ fixé, on obtient

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}W_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt\right)x^n=\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(x\cos t)^n\right)dt=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1-x\cos t}\,dt.$$

Soit $x\in]-1,1[$ fixé. Calculons l'intégrale précédente en posant $u=\tan\frac{t}{2}$ et donc $dt=\frac{2du}{1+u^2}$. On obtient

$$f(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1-x\cos t}\,dt=\int_0^1\frac{1}{1-x\frac{1-u^2}{1+u^2}}\,\frac{2du}{1+u^2}\,du=\int_0^1\frac{2}{(1-x)+u^2(1+x)}\,du$$

$$=\frac{2}{1+x}\int_0^1\frac{1}{u^2+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}\,du=\frac{2}{1+x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left[\operatorname{Arctan}\frac{u}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right]_0^1=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Donc,

$$\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}W_nx^n=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Maintenant, pour $x=1$, puisque $W_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, la série de terme général W_n diverge ou encore f n'est pas défini en 1.
D'autre part, pour $x=-1$, la suite W_n est positive et tend vers 0 en décroissant. Donc la série de terme général $(-1)^nW_n$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Montrons alors que la somme f est continue en -1.
Soit $x\in[-1,0]$. La suite $(-1)^nW_nx^n=W_n(-x)^n=W_n|x|^n$ est positive et tend vers 0 en décroissant (produit de deux suites positives décroissantes). La série de terme général W_nx^n est donc une série alternée. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, on a

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}W_kx^k\right|\leqslant\left|W_{n+1}x^{n+1}\right|=W_{n+1}|x|^{n+1}\leqslant W_{n+1},$$

et donc

$$\sup\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}W_kx^k\right|,\ x\in[-1,0]\right\}\leqslant W_{n+1}\underset{n\to+\infty}{\to}0.$$

La série entière de somme f converge uniformément vers f sur $[-1,0]$. On en déduit que f est continue sur $[-1,0]$ et en particulier que

$$f(-1)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Maintenant, quand x tend vers -1,

$$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\sim\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{2}{1-x}\sim1.$$

On a montré que

$$\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}W_nx^n=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\text{ et }\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nW_n=1.$$

13) Volume de la boule unité en dimension n.

Soit E un espace euclidien de dimension n strictement positive et $B_n(R)$ la boule de centre O et de rayon strictement positif R. Le volume de $B_n(R)$ est

$$V_n(R)=\underset{x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2}{\int\cdots\int}dx_1\ldots dx_n.$$

On effectue déjà le changement de variables $x_1 = Ry_1$, ... , $x_n = Ry_n$. Le jacobien de ce changement de variables linéaire est R^n et donc $V_n(R) = R^n \displaystyle\int\cdots\int_{y_1^2+\ldots+y_n^2\leqslant 1} dy_1 \ldots dy_n = R^n V_n(1)$.

$$(\forall R > 0),\ (\forall n \in \mathbb{N}^*),\ V_n(R) = R^n V_n(1).$$

Il reste à calculer $V_n(1)$. Soit n un naturel supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned}V_n(1) &= \int\cdots\int_{x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant 1} dx_1 \ldots dx_n = \int_{x_n=-1}^{x_n=1}\left(\int\cdots\int_{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2\leqslant 1-x_n^2} dx_1 \ldots dx_{n-1}\right) dx_n = \int_{x_n=-1}^{x_n=1} V_{n-1}(\sqrt{1-x_n^2})\ dx_n\\ &= \int_{-1}^{1} (\sqrt{1-x^2})^{n-1} V_{n-1}(1)\ dx = I_{n-1}V_{n-1}(1),\end{aligned}$$

où $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^n\ dx = 2\int_0^1\left(\sqrt{1-x^2}\right)^n\ dx$ ou encore, en posant $x = \cos t$:

$$I_n = 2\int_{\pi/2}^{0}\left(\sqrt{1-\cos^2 t}\right)^n(-\sin t)\ dt = 2\int_0^{\pi/2}\sin^{n+1} t\ dt = 2W_{n+1}.$$

En tenant compte de $V_1(1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} dx = 2$, on obtient

$$V_1(1) = 2 \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ V_n(1) = 2W_n V_{n-1}(1).$$

Par suite, pour $n \geqslant 2$, $V_n(1) = V_n(1)(2W_2)(2W_3)\ldots(2W_n) = 2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} W_k$ (puisque $W_1 = 1$). On retrouve en particulier

$$\forall R > 0,\ V_1(R) = 2R,\ V_2(R) = \pi R^2 \text{ et } V_3(R) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Plus généralement, en tenant compte de l'égalité, valable pour tout entier naturel n, $W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$, on a pour p entier naturel non nul donné

$$V_{2p}(1) = 2^{2p}\prod_{k=1}^{2p} W_k = 2^{2p}\prod_{k=1}^{p} W_{2k-1}W_{2k} = 2^{2p}\prod_{k=1}^{p}\frac{\pi}{2(2k)} = \frac{\pi^p}{p!}.$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ V_{2p}(1) = \frac{\pi^p}{p!} \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall R > 0,\ V_{2p}(R) = \frac{\pi^p R^{2p}}{p!}.$$

La formule donnant $V_{2p+1}(R)$ est moins jolie et n'est pas donnée ici.